4 όμοια θα δούμε ότι η $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
ενώ $\nabla f(0,0) = (0,0)$ από εφαρμογή του ορισμού
και μάλιστα $Df(0,0) = \nabla f(0,0)$ δηλ. η
f διαφορ. στο $(0,0)$ αλλά η Df που $\exists$ στο $\mathbb{R}^2$
είναι ασυνεχής στο $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

δηλ. f συνεχ. διαφορ. στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow$ διαφορ. $\Rightarrow$ συνεχής

Στο $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{|h|} = 0$$

όμοια

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

, Η f μερ. διαφ. στο $(0,0)$

Επίσης,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow f \text{ διαφορ. στο } (0,0)$$

Αλλά, η f δεν είναι συνεχώς διαφορίσιμη
δηλ. δεν ισχύει $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2)$
γιατί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

δεν υπάρχει και το αποδεικνύουμε μέσω ακολουθιών

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\nu\pi}, 0\right) = \frac{2}{\nu\pi}\sin(\nu\pi) - \cos(\nu\pi) = 0 - (-1)^\nu = $$
$$= (-1)^{\nu+1} \to \infty$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Άλγεβρα παραγώγων)

Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ ανοιχτό και $\varphi : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες στο $x \in U \Rightarrow$ οι $f+g$, $f \cdot g$, $\varphi \cdot f$ είναι διαφορίσιμες στο x και μάλιστα

- $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$
- $D(f \cdot g)(x) = \nabla(f \cdot g)(x) = \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}^m}{}^T \cdot \underbrace{Df(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^m}{}^T \cdot \underbrace{Dg(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

- $\underbrace{D(\varphi f)(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{Df(x)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{D\varphi(x)}_{\nabla \varphi(x)}$

Απόδειξη

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν αν αντικαταστήσουμε τις παραγώγους D με τους αντίστοιχους Ιακωβιανούς πίνακες J (βλ. Άλγεβρα Μερικών παραγώγων). Το μόνο που πρέπει να ελέγξουμε είναι αν οι εκφράσεις στα δεξιά πράγματι ικανοποιούν

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x) - (DF)(x)h}{\|h\|} = 0, \quad \forall\ F = f+g \text{ ή } F = f \text{ ή } F = g$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x) - (Df(x) + Dg(x))h}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)h}{\|h\|} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x) - Dg(x)h}{\|h\|}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Κανόνας Αλυσίδας = Διαφόριση Σύνθετης Συνάρτησης)

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $V\subset\mathbb{R}^m$ ανοικτό: $f:U\to\mathbb{R}^m$ με $f(U)\subset V$ και $g:V\to\mathbb{R}^k$ με f διαφορίσιμη στο $x\in U$ και g διαφορίσιμη στο $y=f(x)$ $\Rightarrow$ $g\circ f:U\to\mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $x\in U$ με

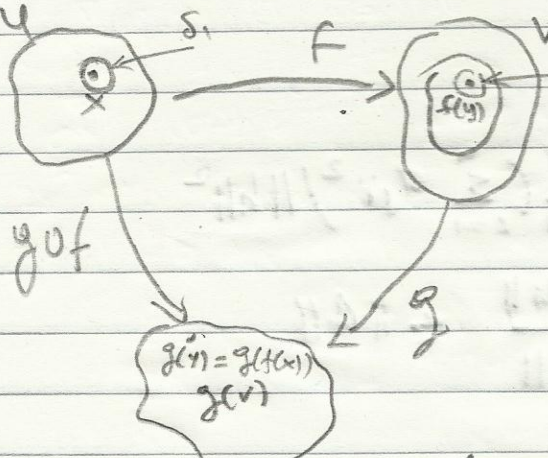
$$\underbrace{D(g\circ f)(x)}_{\in\mathbb{R}^{k\times n}}=\underbrace{Dg(f(x))}_{\in\mathbb{R}^{k\times m}}\cdot\underbrace{Df(x)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $h\in B(0,\delta_2)\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^n$ και $\xi\in B(0,\delta_1)\setminus\{0\}\subset\mathbb{R}^m$

Έτσι $(x+h)\in B(x,\delta_2)\setminus\{x\}\subset U$

$f(x+h)\in B(y,\delta_1)\subset V$ και $(y+\xi)\in B(y,\delta_1)\setminus\{y\}\subset V$



(Τεχνική λεπτομέρεια για να είναι όλες οι τιμές των συναρτήσεων στα σωστά)

Έστω επίσης $A:=Df(x)$

$B:=Dg(f(x))$. Θέλουμε νδο είναι καλά ορισμένο

$$\lim_{h\to0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)-BAh}{\|h\|}=0$$

Έχουμε $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-Ah}{\|h\|}=0$ (1)

$$\lim_{h\to0}\frac{g(y+\xi)-g(y)-Bh}{\|\xi\|}=0 \quad (2)$$

Θεωρούμε $\varphi(h):=f(x+h)-f(x)-Ah$

καθώς επίσης, $\psi(\xi):=g(x+y)-g(y)-B\xi$

άρα (1): $\lim_{h\to0}\frac{\varphi(h)}{\|h\|}$ και (2) $\lim_{h\to0}\frac{\psi(\xi)}{\|\xi\|}$

$$(g\circ f)(x+h)=g(f(x+h))=g(f(x)+Ah+\varphi(h))=$$
$$=g(f(x))+BAh+\varphi(h)\cdot B+\psi(Ah+\varphi(h))$$

μένει νδο

$$\lim_{h\to0}\frac{B\varphi(h)+\psi(Ah+\varphi(h))}{\|h\|}=0$$

όμως, $\lim_{h\to 0} \frac{B\varphi(h)}{\|h\|} = 0$

$(\cancel{x} \mapsto Bx$ συνεχής$)$ ← sos για exams

$\psi(\xi) = \|\xi\| \cdot \psi_1(\xi)$ με $\lim_{\xi\to 0} \psi_1(\xi) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\|\psi(Ah+\varphi(h))\|}{\|h\|} = \frac{\|Ah+\varphi(h)\| \cdot \|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\|Ah\|}{\|h\|} \|\psi_1(Ah+\varphi(h))\| + \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|$$

συγκλίνει στο 0

όταν $\|h\| \to 0$.

Από Cauchy-Schwartz

$$\|Ah\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} h_i \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 \right) \|h\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \|A\|^2 \cdot \|h\|^2 \Rightarrow \frac{\|Ah\|}{\|h\|} \leq \|A\|$$